Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$.
Montrer que, pour tout x, $|f'(x)| \leq M_1$ avec $M_1 = \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \sin \frac{p}{n^2}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a, avec $f''(a) \neq 0$.

Les accroissements finis donnent $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta_h h)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de a.
Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq n!\lambda^n$.

Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[x, x+h]$ et sur $[x-h, x]$.

En déduire $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 M_2$ puis $|f'(x)| \leq \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{h}{2} M_2$.

Étudier l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi(h) = \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{h}{2} M_2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à $t \mapsto \sin t$ entre 0 et x.

Si $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sin \frac{p}{n^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$, en déduire une majoration de $|u_n - v_n|$.

Finalement, constater que u_n tend vers $\dfrac{1}{2}$ quand $n \to +\infty$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Appliquer Taylor-Young : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2)$.

Comparer avec les accroissements finis et en déduire $f'(a + \theta_h h) = f'(a) + \frac{h}{2} f''(a) + o(h)$.

Prouver alors l'existence de α_h dans $]0, 1[$ tel que $f'(a + \theta_h h) - f'(a) = \theta_h\, h\, f''(a + \alpha_h h)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Appliquer l'égalité de Taylor-Young pour évaluer $f(a+h)$ et $f(a-h)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang $n-1$, entre 0 et x.

En déduire $|f(x)| \leq |(\lambda x)^n|$ puis $f(x) \equiv 0$ sur $\left[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right]$.

Considérer ensuite $g : x \mapsto g(x) = f\left(x + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$. Généraliser enfin à d'autres translations.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Soient x dans $\mathbb{R}$ et h dans $\mathbb{R}^{+*}$.

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$, et entre x et $x-h$.

On obtient : $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leq \dfrac{h^2}{2}M_2$ et $|f(x-h)-f(x)+hf'(x)| \leq \dfrac{h^2}{2}M_2$.

On en déduit $|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)| \leq h^2 M_2$.

Il en découle $|2hf'(x)| \leq |f(x+h)-f(x-h)| + h^2M_2 \leq 2M_0 + h^2M_2$.

Et finalement, pour tout $h>0$, on constate que $|f'(x)| \leq \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{h}{2}M_2$.

Notons φ l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi(h) = \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{h}{2}M_2$.

Pour tout h de $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\varphi'(h) = -\dfrac{M_0}{h^2} + \dfrac{M_2}{2}$.

- Si $M_2 > 0$ le minimum de φ est atteint en $h_0 = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$, et vaut $\sqrt{2M_0M_2}$.

  On a $|f'(x)| \leq \varphi(h)$ pour tout $h>0$, donc $|f'(x)| \leq \varphi(h_0)$ donc $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

- Si $M_2 = 0$, c'est-à-dire si f'' est la fonction nulle, alors f est une fonction affine.

  Mais par hypothèse f est bornée sur $\mathbb{R}$. Donc f est constante.

  Sa dérivée est donc la fonction nulle et $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$ est encore vrai.

Conclusion : pour tout x de $\mathbb{R}$, on a l'inégalité $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'application $t \mapsto \sin t$ entre 0 et x.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $|\sin x - x| \leq \dfrac{x^3}{3!}$.

Posons $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sin\frac{p}{n^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$.

On trouve alors : $|u_n - v_n| = \left|\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left(\sin\frac{p}{n^2} - \frac{p}{n^2}\right)\right| \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left|\sin\frac{p}{n^2} - \frac{p}{n^2}\right| \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{p^3}{6n^6}$.

Or $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. On en déduit $|u_n - v_n| \leq \dfrac{(n+1)^2}{24n^4}$.

Il en résulte $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

Finalement, on constate que $u_n = v_n + (u_n - v_n)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On applique la formule de Taylor-Young : $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)$.

On compare avec l'égalité donnée par les accroissements finis : $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta_h h)$.

Pour $h\neq 0$, on en déduit $f'(a+\theta_h h)=f'(a)+\frac{h}{2}f''(a)+o(h)$.

Les accroissements finis donnent α_h dans $]0,1[$ tel que $f'(a+\theta_h h)-f'(a)=\theta_h hf''(a+\alpha_h h)$.

En reportant, on obtient l'égalité $\theta_h f''(a+\alpha_h h)=\frac{1}{2}f''(a)+o(1)$.

f'' est continue et $f''(a)\neq 0$. Pour h assez petit on peut donc écrire $\theta_h=\dfrac{\frac{1}{2}f''(a)+o(1)}{f''(a+\alpha_h h)}$.

On fait tendre h tend vers 0 (f'' continue) et on trouve $\lim\limits_{h\to 0}\theta_h=\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On applique la formule de Taylor-Young : $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)$.

On en déduit $f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)$.

Par conséquent $f(a+h)+f(a-h)-2f(a)=h^2f''(a)+o(h^2)$.

On en déduit finalement : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang $n-1$, entre 0 et x :

$$\left|f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{2!}f''(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right|\leq\frac{x^n}{n!}\sup_{[0,x]}\left|f^{(n)}\right|$$

Compte tenu des hypothèses, ce résultat devient : $|f(x)|\leq|(\lambda x)^n|$.

Si on se place sur $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$ et si on fait tendre n vers $+\infty$, on trouve : $f(x)=0$.

Par continuité, on a alors $f(x)\equiv 0$ sur $\left[-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right]$.

Il en découle que f ainsi que toutes ses dérivées sont nulles en $\frac{\varepsilon}{\lambda}$, avec $\varepsilon=\pm 1$.

On considère maintenant l'application $g:x\mapsto g(x)=f\left(x+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$.

L'application g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout n, $g^{(n)}(x)=f^{(n)}\left(x+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$.

On a donc encore $g^{(n)}(0)=0$ pour tout n et les inégalités : $\left|g^{(n)}(x)\right|\leq n!\lambda^n$.

On en déduit comme précédemment que g est identiquement nulle sur $\left[-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right]$.

Autrement dit, f est identiquement nulle sur $\left[-\frac{2}{\lambda},\frac{2}{\lambda}\right]$.

En procédant ainsi à des translations successives, on constate que f est nulle sur $\mathbb{R}$.