# Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ Indication ] [ Correction ]

Soit $E$ un espace préhilbertien réel.
Montrer que pour tous $x, y$ de $E$, $2 + \|x + y\|^2 \leq 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)$.

EXERCICE 2 [ Indication ] [ Correction ]

Calculer la valeur minimum de $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 \, dt$ et dire pour quelles valeurs de $a$ et $b$ ce minimum est atteint.

EXERCICE 3 [ Indication ] [ Correction ]

Soit $E$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $n$ vecteurs unitaires $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tels que, pour tout vecteur $x$ de $E$, on ait $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < e_k, x >^2$.

1. Montrer que les vecteurs $e_k$ sont orthogonaux deux à deux.
2. Montrer que ces vecteurs forment une base orthonormée de $E$.

EXERCICE 4 [ Indication ] [ Correction ]

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< P, Q > = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t) \, dt$.
Soit $\varphi$ la forme linéaire sur $E$ définie par $\varphi(P) = P(0)$.
Montrer qu'il n'existe pas de vecteur $A$ de $E$ tel que, pour tout $P$ de $E$, $\varphi(P) = < A, P >$.

EXERCICE 5 [ Indication ] [ Correction ]

Soit $E$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$. Soit $p$ un projecteur de $E$.
Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$a)$ Le noyau de $p$ et l'image de $p$ sont deux sous-espaces orthogonaux.

$b)$ Pour tout vecteur $x$ de $E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Que devient ce résultat si $E$ est euclidien, c'est-à-dire si $E$ est de dimension finie ?

# Indications ou résultats

**INDICATION POUR L'EXERCICE 1** [Retour à l'énoncé]

Poser $A = 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)$ et $B = 2 + \|x + y\|^2$.

Vérifier que $A - B = 2\|x\|^2\|y\|^2 + \|x - y\|^2$.

**INDICATION POUR L'EXERCICE 2** [Retour à l'énoncé]

Sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, considérer le produit scalaire : $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $F$ le sous-espace de $E$ des polynômes de degré $\leq 1$.

Soit $\varphi \in E$ définie par $\varphi(t) = t\ln t$, avec $\varphi(0) = 0$.

Le problème posé équivaut à rechercher la projection orthogonale $P$ de $\varphi$ sur $F$.

On résout le système formé par $< P, 1 >=< \varphi, 1 >$ et $< P, t >=< \varphi, t >$.

On trouve $P(t) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}t$. Le minimum cherché est $m = \|\varphi - P\| = \dfrac{\sqrt{3}}{18}$.

**INDICATION POUR L'EXERCICE 3** [Retour à l'énoncé]

1. Appliquer l'hypothèse aux $e_j$, et en déduire qu'ils sont orthogonaux deux à deux.
2. Soit $F$ le sous-espace engendré par les $e_j$, et $p$ la projection orthogonale de $E$ sur $F$.
   Pour tout $u$ de $E$, vérifier que $\|p(u)\|^2 = \|u\|^2$. En déduire $p(u) = u$.

**INDICATION POUR L'EXERCICE 4** [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, on suppose que $A$ existe. Considérer $P = XA$, et en déduire que $A = 0$.

**INDICATION POUR L'EXERCICE 5** [Retour à l'énoncé]

- $(a) \Rightarrow (b)$ : appliquer Pythagore à l'égalité $x = p(x) + (x - p(x))$.
- $(b) \Rightarrow (a)$ : Soient $y = p(x) \in \operatorname{Im} p$, et $z \in \operatorname{Ker} p$.
  Pour tout $\lambda$, on a $\|p(\lambda y + z)\|^2 \leq \|\lambda y + z\|^2$.
  En déduire que la fonction affine $\lambda \to 2\lambda < y, z > + \|z\|^2$ reste positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
- Si $E$ est euclidien, cela équivaut à dire que $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$.

# Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On pose $A = 2(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2)$ et $B = 2+\|x+y\|^2$.

$$\begin{aligned} A - B = &\ 2(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2) - 2 - \|x+y\|^2 \\ = &\ 2(1+\|x\|^2+\|y\|^2+\|x\|^2\|y\|^2) - 2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2 < x, y > \\ = &\ 2\|x\|^2\|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y > = 2\|x\|^2\|y\|^2 + \|x-y\|^2 \end{aligned}$$

Donc $A - B \geq 0$, ce qui prouve l'inégalité demandée (et il n'y a égalité que si $x = y = \overrightarrow{0}$.)

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ en posant : $< f, g > = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

Soit $F$ le sous-espace de $E$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

Notons $\varphi$ l'application de $E$ définie par $\varphi(t) = t\ln t$, avec $\varphi(0) = 0$.

Le problème posé équivaut donc à la recherche de $P$ dans $F$ qui minimise la quantité $\|\varphi - P\|$.

On sait que ce problème a une solution unique : la projection orthogonale $P$ de $\varphi$ sur $F$.

Cette projection est l'unique vecteur $P(t) = a + bt$ de $F$ tel que $\begin{cases} < P-\varphi, 1 > = 0 \\ < P-\varphi, t > = 0 \end{cases}$

Il s'agit donc de résoudre le système (S) : $\begin{cases} < P, 1 > = < \varphi, 1 > \\ < P, t > = < \varphi, t > \end{cases}$

Or $< \varphi, 1 > = \displaystyle\int_0^1 t\ln t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,dt = -\frac{1}{4}$.

De même, $< \varphi, t > = \displaystyle\int_0^1 t^2\ln t\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 t^2\,dt = -\frac{1}{9}$.

Enfin, en posant $P(t) = a + bt$, $< P, 1 > = a + \dfrac{b}{2}$ et $< P, t > = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3}$.

Le système (S) est donc équivalent à : $\begin{cases} a + \dfrac{b}{2} = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3} = -\dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

Par “Pythagore”, le minimum recherché $\|\varphi - P\|$ est tel que $\|\varphi - P\|^2 = \|\varphi\|^2 - \|P\|^2$.

Or $\|\varphi\|^2 = \displaystyle\int_0^1 t^2(\ln t)^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}(\ln t)^2\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 t^2\ln t\,dt = -\frac{2}{3}\int_0^1 t^2\ln t\,dt = \frac{2}{27}$.

De même, $\|P\|^2 = \dfrac{1}{36}\displaystyle\int_0^1 (-2+t)^2\,dt = \frac{7}{108}$.

Le minimum $m$ des $I(a,b)$ vérifie donc $m^2 = \dfrac{2}{27} - \dfrac{7}{108} = \dfrac{1}{108}$. Ainsi $m = \sqrt{\dfrac{1}{108}} = \dfrac{\sqrt{3}}{18}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Pour tout vecteur $e_j$, on a : $1 = \|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < e_k, e_j >^2 = 1 + \sum_{k \neq j} < e_k, e_j >^2$.

   On en déduit $j \neq k$, $< e_j, e_k >= 0$. Les vecteurs $e_k$ sont donc orthogonaux deux à deux.
2. Soit $F$ le sous-espace de $E$ engendré par les $n$ vecteurs orthonormés $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

   Soit $p$ la projection orthogonale de $E$ sur $F$.

   Pour tout $u$ de $E$, $p(u) = \sum_{k=1}^{n} < e_k, u > e_k$ et donc $\|p(u)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < e_k, u >^2 = \|u\|^2$.

   On sait d'autre part que $\|u\|^2 = \|p(u)\|^2 + \|u - p(u)\|^2$ (Pythagore).

   Ainsi $u - p(u) = \overrightarrow{0}$. Autrement dit, pour tout $u$ de $E$, $u = p(u) \in F$. Donc $F = E$.

   Les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forment donc une base orthonormée de $E$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'un tel polynôme $A$ existe.

En utilisant $P = XA$, on alors $< XA, A >= \varphi(XA) = 0$, c'est-à-dire $\int_0^1 tA^2(t)\,dt = 0$.

Puisque l'application $t \to tA^2(t)$ est continue, de signe constant et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, cette application est identiquement nulle sur cet intervalle.

Le polynôme $A$ est donc nul sur $]0, 1]$, donc identiquement nul.

La forme linéaire $\varphi$ est donc nulle, ce qui est absurde car par exemple $\varphi(1) = 1$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

– Supposons que l'hypothèse $(a)$ soit réalisée. Cela signifie que $(\operatorname{Im} p)^\perp \subset \operatorname{Ker} p$.

  Pour tout vecteur $x$ de $E$, on sait que $x - p(x)$ est dans $\operatorname{Ker} p$.

  L'égalité $x = p(x) + (x - p(x))$ donne alors, par Pythagore :

  $\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$, et donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

– Réciproquement, on suppose que pour tout $x$ de $E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

  Soient $y = p(x)$ un élément de $\operatorname{Im} p$ (donc un vecteur invariant par $p$) et $z$ un vecteur de $\operatorname{Ker} p$. Il faut montrer que $y$ et $z$ sont orthogonaux.

  Pour tout scalaire $\lambda$, on a l'inégalité $\|p(\lambda y + z)\|^2 \leq \|\lambda y + z\|^2$.

  Or $p(\lambda y + z) = \lambda p(y) + p(z) = \lambda y$, et $\|\lambda y + z\|^2 = \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda < y, z > + \|z\|^2$.

  On en déduit que la fonction affine $\lambda \to 2\lambda < y, z > + \|z\|^2$ reste positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est possible que si le produit scalaire $< y, z >$ est nul.

  On a donc démontré $(a) \Leftrightarrow (b)$.

– Si $E$ est euclidien, les seules projections de $E$ qui vérifient $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x$ sont donc les projections orthogonales c'est-à-dire les projections telles que $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.