Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer, pour tout réel x, le cardinal de la classe d'équivalence de x.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $(x,y)\mathcal{R}(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$ est-elle une relation d'équivalence ?
Si oui quelles sont les classes d'équivalence ?
La relation $(x,y)\mathcal{S}(z,t) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = zt \\ xz \geq 0 \end{cases}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Dans le plan $\mathcal{P}$ d'origine O, la relation "$M\mathcal{R}N \Leftrightarrow O, M, N$ sont alignés" est-elle une relation d'équivalence ? Même question si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} - \{O\}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $(m,n)\mathcal{R}(p,q) \Leftrightarrow mq = np$. Est-ce une relation d'équivalence ?
Et si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par $\mathbb{N}^2$?

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $\mathcal{M}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ telle que : $\forall X, Y \in \mathcal{M}, \exists Z \in \mathcal{M}, Z \subset X \cap Y$.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}, A \cap X = B \cap X$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \operatorname{card}(A\Delta B)$ est pair.
$\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Se souvenir que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ définit toujours une relation d'équivalence.
2. Constater que $x\mathcal{R}a \Leftrightarrow (x = a)$ ou $(P(x) = x^2 + ax + a^2 - 3 = 0)$. Discuter suivant a, et se demander si les éléments obtenus sont vraiment différents. On pourra faire d'une part une démonstration purement algébrique, d'autre part une démonstration graphique.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont des hyperboles et les axes $x = 0$ et $y = 0$.

La relation $\mathcal{S}$ n'est pas d'équivalence car elle n'est pas transitive.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La relation $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.

Si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} - \{O\}$, Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont les demi-droites issues (et privées) de l'origine.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Cela n'est plus vrai si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par $\mathbb{N}^2$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Seule la transitivité n'est pas évidente : il faut utiliser l'hypothèse sur $\mathcal{M}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Seule la transitivité n'est pas évidente. Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$, il pourra être de commode de noter a, b, c, ab, ac, bc, abc les cardinaux des sous-ensembles délimités par les ensembles A, B, C dans leur configuration la plus générale (faire un dessin.)

Montrer alors que $\text{Card}\,(A\Delta B) + \text{Card}\,(B\Delta C)$ diffère de $\text{Card}\,(A\Delta C)$ par un entier pair.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

La relation $\mathcal{R}$ s'écrit $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, où f est l'application $t \mapsto t^3 - 3t$.

Il est alors évident que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Soit a un réel. La classe d'équivalence de a est l'ensemble des réels x tels que $f(x) = f(a)$.

Voyons d'abord une réponse algébrique à la deuxième question de l'exercice.

On a : $f(x) - f(a) = x^3 - 3x - a^3 + 3a = (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3)$.

Donc $x\mathcal{R}a \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } P(x) = 0)$ avec $P(x) = x^2 + ax + a^2 - 3$.

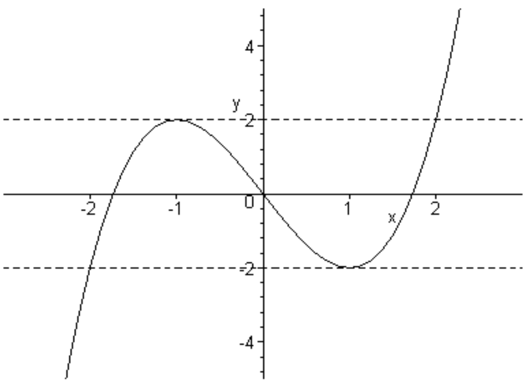
Le discriminant de P est $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 3) = 3(4 - a^2)$.

- Si $|a| > 2$, alors $\Delta < 0$, et la classe d'équivalence de a se réduit au singleton $\{a\}$.
- Si $a = \pm 2$, alors $P(x) = (x + \frac{a}{2})^2$.
  Dans ce cas la classe d'équivalence de x se réduit à la paire $\{a, -\frac{a}{2}\}$.
- Si $|a| < 2$, alors $\Delta > 0$, et $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{3(4 - a^2)})$.
  Les deux racines de P sont distinctes l'une de l'autre, mais sont-elles distinctes de a ?
  Pour le savoir, on calcule $P(a) = 3(a^2 - 1)$. On en déduit les résultats suivants :
  - ◇ Si $a = \pm 1$, alors $P(x) = (x - a)(x + 2a)$. Dans ce cas la classe d'équivalence de x se réduit à la paire $\{a, -2a\}$.
  - ◇ Si $|a| < 2$ et $a \neq \pm 1$, alors la classe d'équivalence de a contient exactement trois éléments. Ces trois réels distincts sont a, $\frac{1}{2}(-a - \sqrt{3(4 - a^2)})$ et $\frac{1}{2}(-a + \sqrt{3(4 - a^2)})$.

En fait, la meilleure réponse à la question du cardinal de la classe de a est graphique.

Considérons en effet le graphe Γ de $f : t \mapsto t^3 - 3t$. Soit A le point d'abscisse a de Γ.

Il faut compter en combien de points différents l'horizontale passant par A rencontre Γ.



On voit bien apparaître les valeurs $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$, pour lesquelles l'horizontale coupe le graphe de f en deux points (ce sont les deux droites tracées en pointillés).

On voit enfin que pour une valeur de a distincte des quatre précédentes, l'horizontale passant par A coupe Γ en le seul point A si $|a| > 2$ et en trois points distincts (dont A) si $|a| < 2$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(a,b) = ab$.

Avec cette notation $(x,y)\mathcal{R}(z,t) \Leftrightarrow f(x,y) = f(z,t)$. La réflexivité, la symétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$ sont alors évidentes : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont définies par les égalités $xy = a$, où a est un réel donné.

Si $a \neq 0$, on trouve les points de l'hyperbole équilatère d'équation $y = \dfrac{a}{x}$.

Si $a = 0$, on trouve la réunion des deux axes $x = 0$ et $y = 0$.

La relation $\mathcal{S}$ n'est pas d'équivalence car elle n'est pas transitive. On en effet, on constate que $(1,0)\mathcal{S}(0,0)$ et que $(0,0)\mathcal{S}(-1,0)$, mais on n'a pas $(1,0)\mathcal{S}(-1,0)$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La relation $\mathcal{R}$ n'est pas transitive. En effet, si A et B sont deux points qui ne sont pas alignés avec O (donc qui ne vérifient pas $A\mathcal{R}B$), on a pourtant $A\mathcal{R}O$ et $O\mathcal{R}B$.

Si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} - \{O\}$, on a $M\mathcal{R}N \Leftrightarrow \exists\, \lambda > 0$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{ON}$.

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les demi-droites issues (et privées) de l'origine.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On note f l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(m,n) = \frac{m}{n}$.

Avec cette notation $(m,n)\mathcal{R}(p,q) \Leftrightarrow f(m,n) = f(p,q)$.

La réflexivité, la symétrie et la transitivité sont alors évidentes.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

Remarque :

Le résultat est faux si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par $\mathbb{N}^2$.

En effet on a alors $(1,0)\mathcal{R}(0,0)$ et $(0,0)\mathcal{R}(0,1)$ mais pas $(1,0)\mathcal{R}(0,1)$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

– *Réflexivité* :

  Pour toute partie A de E, on a bien $A\mathcal{R}A$ car $A \cap X = A \cap X$ pour un élément X quelconque de $\mathcal{M}$ (et il en existe puisque $\mathcal{M}$ est supposé non vide).

– *Symétrie* :

  Soient A, B deux parties de E telles que $A\mathcal{R}B$, c'est-à-dire telles qu'il existe un élément X de M vérifiant $A \cap X = B \cap X$.
  On a évidemment $B \cap X = A \cap X$, ce qui prouve que $B\mathcal{R}A$.

– *Transitivité* :

Soient A, B, C trois parties de E telles que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$.
Il existe donc deux éléments X et Y de $\mathcal{M}$ tels que $A \cap X = B \cap X$ et $B \cap Y = C \cap Y$.
Mais par hypothèse, il existe un Z dans $\mathcal{M}$ tel que $Z \subset X \cap Y$.

On en déduit :

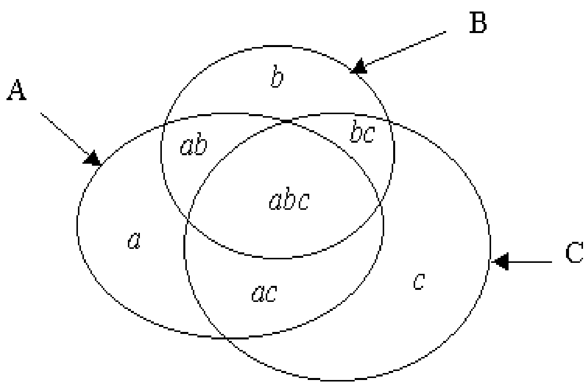
◇ $A \cap X \cap Z = B \cap X \cap Z$, c'est-à-dire $A \cap Z = B \cap Z$ (car $X \cap Z = Z$.)

◇ $B \cap Y \cap Z = C \cap Y \cap Z$, c'est-à-dire $B \cap Z = C \cap Z$ (car $Y \cap Z = Z$.)

Il s'ensuit que $A \cap Z = C \cap Z$, ce qui prouve $A\mathcal{R}C$.
La relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $A \subset E$: $A\Delta A = \emptyset \Rightarrow \text{card}(A\Delta A) = 0 \Rightarrow A\mathcal{R}A$: $\mathcal{R}$ est réflexive.
Pour toutes parties de A, B de E, on a $A\Delta B = B\Delta A$. La symétrie de sa définition implique donc la symétrie de la relation $\mathcal{R}$.
Soit A, B, C trois parties de E. On suppose $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$.
Un dessin valant mieux qu'un long discours, on a représenté ici les trois ensembles A, B, C (dans une configuration générique), et on désigne par a, b, c, ab, ac, bc, abc les cardinaux des sous-ensembles délimités comme indiqué ci-dessous.



On a ainsi :

$$\text{Card}\,(A\Delta B) = a + ac + b + bc, \text{Card}\,(B\Delta C) = b + ab + c + ac, \text{Card}\,(A\Delta C) = a + ab + c + bc$$

Par hypothèse, il existe deux entiers m et n tels que $\begin{cases} \text{Card}\,(A\Delta B) = 2m \\ \text{Card}\,(B\Delta C) = 2n \end{cases}$

Or on remarque que :

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A\Delta B) + \text{Card}\,(B\Delta C) &= (a + ac + b + bc) + (b + ab + c + ac) \\ &= (a + c + ab + bc) + 2(b + ac) \\ &= \text{Card}\,(A\Delta C) + 2(b + ac) \end{aligned}.$$

On en déduit que $\text{Card}\,(A\Delta C) = 2(m + n - b - ac)$ est un entier pair.
Ainsi $A\mathcal{R}C$: la relation $\mathcal{R}$ est transitive.
Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.