Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Trouver la condition nécessaire et suffisante sur les complexes p et q pour que les points images des racines de l'équation $z^3 + pz + q = 0$ forment un triangle rectangle isocèle.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur z pour que les points $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^4)$ soient alignés.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Quelle est l'image du cercle $|z-1| = 1$ par la transformation $m(z) \mapsto M\Big(Z = \dfrac{z}{2-z}\Big)$?

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Identifier la transformation $m(z) \mapsto M(Z)$ du plan complexe définie par $Z = (1+i)z + 2 - i$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Identifier la transformation $m(z) \mapsto M(Z)$ du plan complexe définie par $Z = (-3+4i)\bar{z}+12+6i$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Identifier la transformation $m(z) \mapsto M(Z)$ du plan complexe définie par $Z = i\bar{z} + 1$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Si α, β, γ sont les racines, la condition s'écrit $\gamma = (1-i)\alpha + i\beta$.

On montre qu'elle se résume à l'existence de α tel que $\alpha^2 = \frac{2}{3}\,p$ et tel que $\alpha^3 = -\frac{2}{5}\,q$.

Finalement la condition cherchée est : $50p^3 = 27q^2$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Traiter d'abord les cas où A, B, C ne sont pas tous distincts.

On trouve finalement les axes $y = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On obtient l'axe des imaginaires purs.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'application f est une similitude directe. Elle est la composée de :
- L'homothétie de rapport $\Omega(1, 2)$ de rapport $\sqrt{2}$.
- La rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

L'application f est la composée de :
- L'homothétie h de centre $\Omega(0, -3)$ de rapport 5.
- La symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

L'application f est la composée de :
- La symétrie orthogonale s par rapport à la droite Δ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$.
- La translation t de vecteur $u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Notons α, β, γ les racines de $z^3 + pz + q = 0$.

La condition demandée s'écrit $\gamma - \alpha = i(\beta - \alpha)$, ou encore $\gamma = (1-i)\alpha + i\beta$.

On écrit les relations coefficients racines et on y ajoute la condition précédente. On obtient :

$$\begin{cases} \gamma = (1-i)\alpha + i\beta \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p \\ \alpha\beta\gamma = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = (1-i)\alpha + i\beta \\ (2-i)\alpha + (1+i)\beta = 0 \\ \alpha(\beta+\gamma) + \beta\gamma = p \\ \alpha\beta\gamma = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = (1-i)\alpha + i\beta \\ \beta = \frac{-1+3i}{2}\,\alpha \\ -\alpha^2 + \beta\gamma = p \\ \alpha\beta\gamma = -q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{-1-3i}{2}\,\alpha \\ \beta = \dfrac{-1+3i}{2}\,\alpha \\ -\alpha^2 + \beta\gamma = p \\ \alpha\beta\gamma = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \dfrac{-1-3i}{2}\,\alpha \\ \beta = \dfrac{-1+3i}{2}\,\alpha \\ \frac{3}{2}\,\alpha^2 = p \\ \frac{5}{2}\,\alpha^3 = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \dfrac{-1-3i}{2}\,\alpha \\ \beta = \dfrac{-1+3i}{2}\,\alpha \\ \alpha^2 = \dfrac{2}{3}\,p \\ \alpha^3 = -\dfrac{2}{5}\,q \end{cases}$$

Finalement la condition sur p, q se résume à l'existence de α tel que $\alpha^2 = \frac{2}{3}\,p$ et $\alpha^3 = -\frac{2}{5}\,q$.

Ces conditions impliquent $(\frac{2}{3}\,p)^3 = (-\frac{2}{5}\,q)^2$ donc $50p^3 = 27p^2$.

Réciproquement, et si cette condition est réalisée, c'est-à-dire si $(\frac{2}{3}\,p)^3 = (-\frac{2}{5}\,q)^2$, alors toute racine carrée α de $\frac{2}{3}\,p$ vérifie $\alpha^6 = (-\frac{2}{5}\,q)^2$ donc $\alpha^3 = \pm\frac{2}{5}\,q$. Comme α est défini au signe près, on peut le choisir de telle sorte que $\alpha^3 = -\frac{2}{5}\,q$.

Conclusion : la condition sur p, q pour que les points images des racines de $z^3 + pz + q = 0$ forment un triangle rectangle isocèle est $50p^3 = 27q^2$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Si $z \in \{0, 1, -1, j, j^2\}$, les points A, B, C ne sont pas tous distincts, donc sont alignés.

Si $z \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$, A, B, C sont alignés$\Leftrightarrow \dfrac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z(z+1) \in \mathbb{R}$.

Posons $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z(z+1) = x^2 - y^2 + x + iy(2x+1)$.

$z(z+1)$ est donc réel si et seulement si $y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

Les solutions forment donc l'axe $y = 0$ (dont $0, 1, -1$) et l'axe $x = -\frac{1}{2}$ (dont j, j^2).

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Si $z = 1 + e^{i\theta}$, avec $-\pi < \theta \le \pi$, $Z = \dfrac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \dfrac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = \dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = i\mathrm{cotan}\dfrac{\theta}{2}$

Quand $m(z)$ parcourt le cercle $|z-1| = 1$, θ parcourt $]-\pi, \pi]$ et $\mathrm{cotan}\frac{\theta}{2}$ parcourt $\mathbb{R}$.

L'image du cercle $|z-1| = 1$ est donc l'axe des imaginaires purs.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

C'est une similitude directe f de rapport $|1+i|=\sqrt{2}$ et d'angle $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$.

Le centre Ω de f est le point dont l'affixe ω vérifie $\omega=(1+i)\omega+2-i$.

On trouve $\omega=1+2i$. f est donc la composée (commutative) de l'homothétie de rapport $\Omega(1,2)$ de rapport $\sqrt{2}$, et de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

C'est une similitude indirecte f, de rapport $|-3+4i|=5$.

Comme le rapport est différent de 1, il y a un point fixe unique Ω, d'affixe ω.

$$\begin{aligned}\omega &= (-3+4i)\overline{z}+12+6i=(-3+4i)\overline{\left((-3+4i)\overline{z}+12+6i\right)}+12+6i \\ &= 25z+(-3+4i)(12-6i)+12+6i=25z+72i\end{aligned}.$$

Le point fixe est donc donné par : $\omega=-3i$.

L'égalité $Z=(-3+4i)\overline{z}+12+6i$ devient $\begin{cases} Z=(-3+4i)\overline{z}+12+6i \\ \omega=(-3+4i)\overline{\omega}+12+6i\end{cases}$.

Autrement dit, Z est donné par $Z-\omega=(-3+4i)(\overline{z-\omega})$.

L'application f est la composée de l'homothétie h de centre $\Omega(0,-3)$ de rapport 5, et de la symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ passant par Ω.

Pour trouver Δ, on cherche les points qui ne sont affectés que par l'homothétie.

On résout $Z-\omega=5(z-\omega)$, c'est-à-dire $(-3+4i)(\overline{z}-3i)=5(z+3i)$.

En posant $z=x+iy$, il vient $(-3+4i)(x-i(y+3))=5x+5(y+3)i$.

On trouve $\begin{cases} -3x+4(y+3)=5x \\ 4x+3(y+3)=5(y+3)\end{cases}$ c'est-à-dire $y=2x-3$.

Ainsi f est la composée de l'homothétie h et de la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y=2x-3$ (on vérifie que Δ passe par le point Ω).

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

C'est une similitude indirecte f de rapport $|i|=1$, donc un antidéplacement.

L'application f est la composée commutative de la symétrie orthogonale s par rapport à une droite Δ et d'une translation t de vecteur u parallèle à Δ.

On trouve u en notant que $f\circ f$ est la translation de vecteur $2u$.

Or $f(f(z))=i\left(\overline{i\overline{z}+1}\right)+1=z+1+i$: la translation t est de vecteur $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Pour trouver Δ, on cherche les points qui ne sont affectés que par la translation t.

On résout donc $f(z)=z+\dfrac{1+i}{2}$ c'est-à-dire $i\overline{z}+1=z+\dfrac{1+i}{2}$.

Avec $z=x+iy$, on trouve $2(y+1+ix)=2x+1+i(2y+1)$, donc $y=x-\frac{1}{2}$.

L'application f est la composée commutative de la symétrie orthogonale s par rapport à la droite Δ d'équation $y=x-\frac{1}{2}$, et de la translation t de vecteur $u=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.